Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

19/05/2016

άξονας: (ϵ) $\vec{\varepsilon_1} = x$, όπου $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

(Π) $<\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}>$ επεκτείναμε το $\vec{\varepsilon_1}$ σε ΟΚΒ του $\mathbb{R}^{3\times 1}$ με τα διανύσματα $\vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3}$.

συνφ

$$tr(P^tAP) = tr\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{συν}\phi & -\text{ημ}\phi \\ 0 & \text{ημ}\phi & \text{συν}\phi \end{pmatrix} = 1 + \text{συν}\phi + \text{συν}\phi = 1 + 2\text{συν}\phi$$

αν είναι $\det = -1 \Rightarrow$ ιδιοτιμή $= -1$.

$$P^tAP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{συν}\phi & -\text{ημ}\phi \\ 0 & \text{ημ}\phi & \text{συν}\phi \end{pmatrix}$$

—*—*—*—*—*—*—*—

Φυλλάδιο #6

Ασκ: 4

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Δείξτε ότι παριστάνει στροφή κατά γωνία ϕ περί ενός άξονα (ϵ) που περνάει από το σημείο $(0,0,0)$ και το συνφ.

Να προσδιορίσετε τον άξονα (ϵ) και το συνφ.

1η απαίτηση του Euler: $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

2η απαίτηση του Euler: A ορθογώνιος

δηλαδή

$$A^t \circ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ άρα A ορθογώνιος

3η απαίτηση του Euler: $\det A = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$

Άρα, από το θεώρημα του Euler, ο A παριστάνει στροφή κατά ϕ περί ενός άξονα (ϵ).

→ → →

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; (A-1I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to -\frac{r_3}{2}]{r_1 \to -r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ z = 0 \\ y = t \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{array}, \quad \text{με } t \in \mathbb{R}.$$

Άρα $V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

διαιρούμε με το μήκος

Επομένως, ο άξονας (ε) : $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$tr\,A = 1 + 2\,συνφ.$

$-1 = 1 + 2\,συνφ \Rightarrow -2 = 2\,συνφ \Rightarrow συνφ = 1 \Rightarrow φ = π.$

Προσθήκη Άσκησης : Να βρω ορθογώνιο πίνακα P τέτοιο ώστε:

$$P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ και το επίπεδο (Π).

Συμπληρώστε το $\vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ σε ΟΚΒ του $\mathbb{R}^{3\times 1}$.

Συμπληρώναμε σε βάση $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}/2}{1} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \vec{e}_1 - \frac{\langle \vec{a}_3, \vec{e}_2 \rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 - 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως,

$$\vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα, $(\Pi): \langle \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

και

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{\epsilon}_1 & \vec{\epsilon}_2 & \vec{\epsilon}_3 \end{array} \end{array}$$

Άσκηση 1

Έστω $A = A^t$ και αρνητικός πίνακας. Δείξτε ότι ο πίνακας $A - 2016I$ είναι αντιστρέψιμος

↓

αρνητικός πίνακας $\Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $X^t A X < 0$, $\langle AX, X \rangle < 0$ $\Rightarrow$ οι ιδιοτιμές του είναι όλες αρνητικές.

Έστω $A-2016I$ δεν είναι αντιστρέψιμος. $\Rightarrow \det(A-2016I)=0 \Rightarrow 2016$ ιδιοτιμή του A

όμως, A αρνητικός, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές

Άτοπο! άρα $A-2016I$ αντιστρέψιμος

Άσκηση 2: Έστω $A \in \mathbb{R}^{2016\times 2016}$ συμμετρικός πίνακας.

Αν $\chi_A(x) = (x-7)^6\cdot(x-11)^{10}\cdot(x+4)^{999}\cdot(x+2015)^{1001}$

Τότε $m_A(x)$??

↓ Συμμετρικός πίνακας $\xLeftrightarrow[\text{θεώρημα}]{\text{φασματικό}}$ διαγωνίσιμος.

Άρα το $m_A(x) = (x-7)(x-11)(x+4)(x+2015)$

(Γιατί πρέπει το $m_A(x)$ να είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων όρων).

Άσκηση 3: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος. Δείξτε ότι $A-\sqrt{2}I$ αντιστρέψιμος.

↓ $A-\sqrt{2}I$ δεν είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \det(A-\sqrt{2}I)=0 \Rightarrow \sqrt{2}$ ιδιοτιμή του ορθογώνιου A

Άτοπο, αφού οι ορθογώνιοι έχουν ιδιοτιμές ± 1.

Άσκηση 4: (Θεώρημα Euler) Δείξτε ότι ο πίνακας

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα (ϵ) κάθετο σ' αυτό. Βρείτε τον άξονα (ϵ) και τον συνημίτονο της γωνίας στροφής.

↓ Για να δείξω ότι ο A παριστάνει στροφή επιπέδου περί άξονα, πρέπει ο A να συμφωνεί με τις απαιτήσεις του θεωρήματος Euler.

- $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
- $A^t \cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.
- $\det(A) = \det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \det\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \dots = 1$

Άρα από το θεώρημα του Euler ο A παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) περί άξονα (ϵ) κάθετο σε αυτό

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (A - 1I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3 & -1/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & 2/3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2/3-1 & -1/3 & 2/3 & 0\\ 2/3 & -2/3-1 & 1/3 & 0\\ 1/3 & 2/3 & 2/3-1 & 0\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c}-5/3 & -1/3 & 2/3 & 0\\ 2/3 & -5/3 & 1/3 & 0\\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}-5 & -1 & 2 & 0\\ 2 & -5 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right) r_1 \leftrightarrow r_3$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -5 & 1 & 0\\ -5 & -1 & 2 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} r_2-2r_1\\ r_3+5r_1\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -9 & 3 & 0\\ 0 & 9 & -3 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} r_2+r_3\\ r_2/-9\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

βάζω το 3 για πιο εύκολα.

$$\begin{cases} z = 3t\\ x+2y-z=0\\ y-\frac{1}{3}z=0\end{cases} \qquad \begin{cases} x=t\\ y=t\\ z=3t.\end{cases}$$

Άρα, $V(1) = \left\{ \begin{pmatrix}t\\ t\\ 3t\end{pmatrix} \middle| \, t\in\mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1/\sqrt{11}\\ 1/\sqrt{11}\\ 3/\sqrt{11}\end{pmatrix} \right\rangle$

Επομένως, $(\varepsilon) : \left\langle \begin{pmatrix}1/\sqrt{11}\\ 1/\sqrt{11}\\ 3/\sqrt{11}\end{pmatrix} \right\rangle$

$tr(A) = 1+2\cos\phi.$

$A = \begin{pmatrix}-2/3 & -1/3 & 2/3\\ 2/3 & -2/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3 & 2/3\end{pmatrix}$, $tr(A) = -\frac{2}{3} - \cancel{\frac{2}{3}} + \cancel{\frac{2}{3}} = 1+2\cos\phi \Rightarrow 2\cos\phi = -\frac{5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\phi = -\frac{5}{6}$

Φυλλάδιο #7

Άσκηση 1

A ορθογώνιος $\Rightarrow A+3I$ αντιστρέψιμος

Λύση

$A+3I = A-(-3)I$ δεν είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \det(A-(-3)I)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3$ ιδιοτιμή του ορθογωνίου A

Άτοπο, αφού οι ορθογώνιοι έχουν ιδιοτιμές ± 1.

Άσκηση 5 $A^t = A$, $B^t = B$ (συμμετρικοί)

ΝΔΟ $\alpha A + \beta B$ ~~συμμετρικός~~ συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

$A>0$

$B>0$

$\alpha \geq 0$

$\beta \geq 0$ και ένας από αυτούς τους 2 διάφορος του μηδενός

Λύση

$$\left.\begin{matrix} A>0 \\ B>0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x^t A x > 0 \\ x^t B x > 0 \end{matrix}$$

$(\alpha A + \beta B)^t = (\alpha A)^t + (\beta B)^t = \alpha A^t + \beta \cdot B^t = \alpha A + \beta B$

Άρα <u>$\alpha A + \beta B$ συμμετρικός</u>.

Έστω $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $x \neq 0_{n\times 1}$.

$$x^t(\alpha A + \beta B)x = x^t \alpha A x + x^t \beta B x = \alpha \underbrace{x^t A x}_{>0} + \beta \underbrace{x^t B x}_{>0} \geq 0$$

Άρα <u>$\alpha A + \beta B$ θετικά ορισμένος</u>

Άσκηση 2 #7

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix},\ P \text{ ορθογώνιος},\ P^tAP \text{ διαγώνιος}$$

A συμμετρικός.

Δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα συμμετρικού πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα.

→ Έστω $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ιδιοτιμές του A.

$x\in\mathbb{R}^{n\times1},\ Ax=\lambda x$ | $\langle Ax,y\rangle=\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$

$y\in\mathbb{R}^{n\times1},\ Ay=\mu y$ | $\langle Ax,y\rangle=(Ax)^ty=x^tA^ty=x^tAy$

$\langle x,Ay\rangle=\langle x,\mu y\rangle=\mu\langle x,y\rangle.$

Άρα $\lambda\langle x,y\rangle=\mu\langle x,y\rangle.$

$(\lambda-\mu)\langle x,y\rangle=0\Rightarrow\langle x,y\rangle=0\Rightarrow x\perp y.$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\chi_A(x)=\det(A-xI)=\det\begin{pmatrix}1-x&-1&0\\-1&2-x&-1\\0&-1&-1-x\end{pmatrix}=(1-x)(2-x)(1-x)-(1-x)-(1-x)=$$

$$=(1-x)^2(2-x)-2(1-x)=(1-x)\big((x-2)(x-1)-2\big)=(1-x)(x^2-3x)=$$

$$=x(1-x)(x-3)$$

Ιδιοτιμές: 0, 1, 3.

$$V(1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \middle|\ (A-1I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&0&0\\-1&1&-1&0\\0&-1&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}x-y+z=0\\y=0\\z=t\in\mathbb{R}.\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}x=-t\\y=0\\z=t\end{array},\ t\in\mathbb{R}.$$

$$V(1)=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\0\\1/\sqrt2\end{pmatrix}\right\rangle.$$

$$V(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ (A-0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$$

Άρα $V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$

$$V(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ (A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \\ z=t \end{cases} \quad \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=t. \end{cases}$$

Άρα $V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle$

P^tAP διαγώνιος

$$\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3, #7

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f((x,y,z)) = (ax-y+z, -x+by-z, x-y+2z)$

Βρείτε τα a, b ώστε η f να έχει ιδιοτιμή 1 με πολλαπλότητα 2.

$e = \{\vec{e_1} = (1,0,0), \vec{e_2} = (0,1,0), \vec{e_3} = (0,0,1)\}$.

$$[f]_e^e = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\dim V(1) = 2.}$

συμμετρικός $\overset{\text{Φασματικό}}{\Longleftrightarrow}$ διαγωνίσιμος $\Rightarrow$ γεωμετρική πολλαπλότητα = αλγεβρική πολλαπλότητα

$$\operatorname{rank}([f]_e^e - 1I) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ -1 & b-1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim V(1) = 2 = 3 - \operatorname{rank}([f]_e^e - 1I) \Rightarrow \operatorname{rank}([f]_e^e - I) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2$ και $b = 2$.